624. 超越直徑ト Koebe ノ定理（續）

井上　正雄（阪大）

談話 622 ニ對スル簡單ナル補足デアル。

前号ニヲイテハ Koebe ノ定理ト超越直徑ニ關スル一ツノ Minimumproblem トノ Äquivalenz ヲ示シテオイタノデアルが，今コレヲ少シク一般化シテ見マセウ。前談話ニヲイテハ[1)]

（I）任意ノ二点
（II）円ト円外ノ一点
（III）單一連続閉曲線（デ囲マレタ閉領域）[2)]ト外部ノ一点

トヲ夫々一ツノ Kontinuum デ接続シ，ソノ超越直徑ヲ最小ナラシメルニハ如何ナル Kontinuum デ接続スレバヨイカ？ ト云フ問題ヲ考ヘタノデアルが，コノ談話デハ一点ヲ更ニ一般化シテ互ニ外部ニアル單一連続閉曲線ヲ一ツノ Kontinuum デ接続シ，ソノ超越直徑ヲ最小ナラシメルモノヲ求メヨウ。

ソノタメ最初

---

1) スベテ有限ノ位置ニアルモノトス。

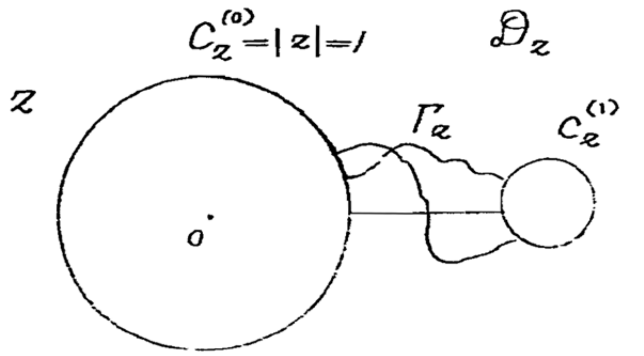
2) 單一連続閉曲線ノ超越直徑モ，之レニテ囲レタ閉領域ノ超越直徑モ等シイコトが知レテイル．尚コノ曲線ニ對スル條件モ以下常ニ一ツノ Kontinuum デ置キ換ヘラレル。

(IV) 互ニ外部ニアル二円

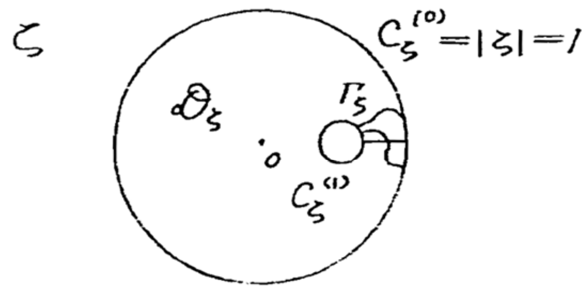
ヲ接続スル場合ヲ考ヘル。

z平面上ノ互ニ外部ニアル二円周ヲ $C_z^{(0)}, C_z^{(1)}$ トシ，之レニテ囲マレタ ∞ ヲ内点トシテ含ム無限二次連結領域ヲ D_z トスル。

尚接続ニヨル超越直径ヲ最小ナラシメルモノヲ求メル問題ハ圖形ノ移動ヤ相似縮小ニヨッテ不変デアルカラ，$C_z^{(0)}$ ガ z平面ノ単位円周デアリ，$C_z^{(1)}$ ノ中心ガ実軸上ニアルモノト假定シテモ何等一般性ヲ失ハナイカラ，此ノ假定ノモトニ話ヲ進メル。



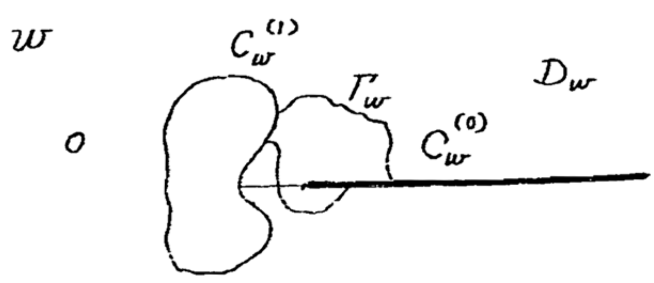
先ヅ $\zeta=\frac{1}{z}$ ナル Inversion デ D_z ヲ ζ平面上ノ単位円内ノ領域 D_ζ ニ変換スル。$C_z^{(1)}$ ノ Bildkreis ヲ $C_\zeta^{(1)}$ トスル。



コノ D_ζ ヲ更ラニ Koebe ノ Extremalfunktion

$$w=\frac{\zeta}{(1+\zeta)^2}$$

ニヨッテ w 平面上ノ

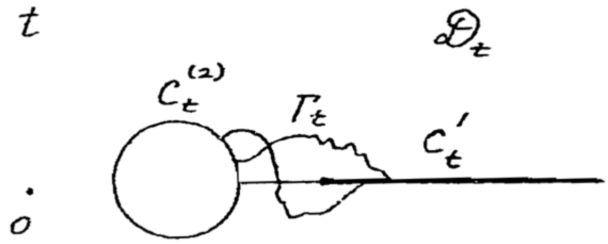


領域 D_w ニ変換スル。

コレニヨリ $|\zeta|=1$ ($C_z^{(0)}$ ノ Bildkreis) ハ $|w|\geqq\frac{1}{4}$, $\arg w=0$ ナル実軸上ノ半直線ニ移サレ, $C_\zeta^{(1)}$ ノ Bildkurve $C_w^{(1)}$ ハ実軸ニ對シテ對稱ナ且ツ之レニ直交スル單一閉解析曲線トナル。

依ツテ更ニ之ノ曲線ガ円周トナル如ク D_w ヲ t 平面上ノ次ノ如キ領域 D_t ニ原点同志相對應スル如ク変換スルコトガ出來ル。

$C_w^{(0)}$ ($|w|\geqq\frac{1}{4}$, $\arg w=0$) ノ Bild ガ $C_t^{(0)}$ ($|t|\geqq\delta$, $\arg t=0$) トナル。 但シ δ ハ寫像函数ニ関係スル正ノ常数, 且ツ $C_w^{(2)}$ ノ Bild ハ中心ガ実軸上ニアル円周 $C_t^{(2)}$ トナル。



サテ $C_z^{(0)}$, $C_z^{(1)}$ ヲ一ツノ單一連続閉曲線[3)] Γ_z デ接続シ, コレノ各寫像函数ニヨル Bild ヲ Γ_ζ, Γ_w, Γ_t トスル。

Γ_t ニヨツテ D_t ニ Schlitz ヲ入レテ出來ル單一連結領域ヲ $\mathfrak{D}_t$ トスル。

$\mathfrak{D}_t$ ヲ x 平面上ノ單位円内ニ原点同志對應スル如ク等角ニ寫像スル。

---

3) カヽル曲線ニノミツイテ考ヘレバヨイコトハ超越直径ノ單調性ヨリシテ明カデアル。

シカルトキ前談話ニヲケル Fekete ノ定理ニヨリ

$$\left|\frac{dx}{d\zeta}\right|_{\zeta=0}=d(CT_0\mathfrak{D}_\zeta)=d(C\mathfrak{D}_z).$$

コヽニ $\mathfrak{D}_\zeta$ ハ $\mathfrak{D}_t$ ノ Urbild デアリ $\mathfrak{D}_z$ ハ $D_z=\Gamma_z$ ニ沿ッテ Schlitz ヲ入レタ領域デアル。

且ツ $$\left|\frac{dx}{dt}\right|_{t=0}=d(CT_0\mathfrak{D}_t)$$

トナル。

シカルニ

$$\left(\frac{dx}{d\zeta}\right)_{\zeta=0}=\left(\frac{dx}{dt}\right)_{t=0}\left(\frac{dt}{dw}\right)_{w=0}\left(\frac{dw}{d\zeta}\right)_{\zeta=0}$$

デアリ $\left|\frac{dt}{dw}\right|_{w=0}$, $\left|\frac{dw}{d\zeta}\right|_{\zeta=0}$ $(\neq 0)$ ハ Γ_z ($\Gamma_\zeta, \Gamma_w, \Gamma_t$) ニハ無関係ナ因数デアルカラ

$$\left|\frac{dx}{d\zeta}\right|_{\zeta=0}\quad(=d(C\mathfrak{D}_z))$$

ヲ最小ナラシメルニハ

$$\left|\frac{dx}{dt}\right|_{t=0}\quad(=d(CT_0\mathfrak{D}_t))$$

ヲ最小ナラシムレバヨイ。

シカルニ $CT_0\mathfrak{D}_t$ ハ円ト外部ノ一点トヲ接続シタモノニ他ナラナイカラ，コレハ(II)ニヨッテ既ニ解決シテオイタヨク円ノ中心ト外部ノ点トヲ結ブ線分ニ沿ッテ接続シタモノガ最小トナリ且之レニ限ツタノデアル。

ヨツテ之レノ *Urbild* トシテ得ラレル l_z（z平面上ノ）ニテ二円周 $C_z^{(0)}$, $C_z^{(1)}$ ヲ接続シタモノガ求メルモノデアル。コレハ取リモ直サズ $C_z^{(0)}$ ト $C_z^{(1)}$ トノ中心ヲ結ブ線分ニ沿ツテ二円周ヲ接続スル場合デアル。

ヨツテ問題ヲ次ノ如ク解クコトガ出來タ。

「互ニ外部ニアル二円周ヲ一ツノ *Kontinuum* デ接続シテ，ソノ超越直径ヲ最小ナラシメルモノハ，両円ノ中心ヲ結ブ線分ニ沿ツテ両円ヲ接続シタトキデアリ，且ツコノトキニ限ル」

サテ，次ニ y 平面上ノ

(V) 互ニ外部ニアル単一連続閉曲線 $C_y^{(0)}$, $C_y^{(1)}$ ヲ一ツノ *Kontinuum* デ接続スル場合ハ次ノヤウニ考ヘレバヨイ。

$C_y^{(0)}$, $C_y^{(1)}$ ヲ境界ニモツ ∞ ヲ内点トシテ含ム二次連結領域ヲ D_y トシ，D_y ヲ z 平面上ノ無限二次連結領域 D_z ニ ∞ 同志ガ對應スル如クニ等角ニ寫像スル。

コヽニ D_z ハ前述セシモノト同一ノ性質ヲ有スルモノトスル。

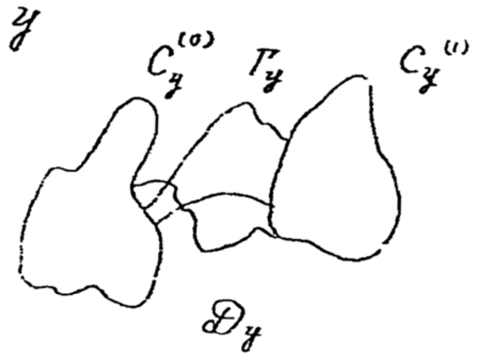
カヽル寫像函数ハ先ヅ D_y ヲ一ツノ円環内ニ寫像シテ後 ∞ ノ *Bildpunkt* ガ再ビ ∞ ニ移ル如ク z 平面上ニ *Inversion* ヲ施シ，シカル後常数ヲ加減乗除スルコトニヨツテ得ラレル。

$C_y^{(0)}$ ト $C_y^{(1)}$ ヲ一ツノ単一連続曲線[3] Γ_y ニテ接続シ，Γ_y ノ *Bildkurve* ヲ Γ_z トスル。D_y ニ Γ_y ニ沿ツテ

Schlitz ノ入ツタ単一連結領域ヲ $\mathfrak{D}_y$ トスル。

同様 D_z ニ Γ_z ニ沿ッテ Schlitz ノ入ッタ領域ヲ $\mathfrak{D}_z$ トシ，之ヲ前同様 $|x|<1$ ニ等角ニ寫像スル。

カクテ $\mathfrak{D}_y$ ヲ $|x|<1$ ニ等角ニ寫像スル函数ガ得ラレル。



$y\longleftrightarrow z$ ナル変換ノ $z=\infty$ ノ近傍ニヲケル展開ヲ

$$y=\lambda z+\lambda_0+\frac{\lambda}{z}+\cdots\cdots$$

トシ，$z\longleftrightarrow x$ ナル変換ヲ

$$z=\frac{\tau}{x}+\tau_0+\tau_1 x+\cdots\cdots,\quad |x|<1$$

但シ $\tau=d(C\mathfrak{D}_z)$

トス。

シカラバ $y\longleftrightarrow x$ ナル変換ハ

$$y=\frac{\lambda\tau}{x}+c_0+c_1 x+\cdots\cdots,\qquad \text{但シ } \lambda\tau=d(C\mathfrak{D}_y)$$

トナル。

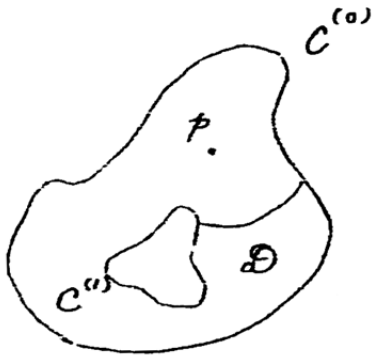
シカルニ λ ハ Γ_y ニ無関係ナ因数ナル故 $d(C\mathfrak{D}_y)$ ヲ最小ナラシメルニハ $\tau=d(C\mathfrak{D}_z)$ ヲ最小ナラシメレバヨイ。コレハ既ニ解決シタ如ク二円 $C_z^{(0)}, C_z^{(1)}$ ノ中心ヲ結ブ線分ニヨッテ両円周ヲ接続シタ場合デアリ，且ツコノトキニ限ルノデアルカラ、之レノ Urbild トナル連続曲線ニテ $C_y^{(0)}$,

$C_y^{(1)}$ ヲ接続シタトキニ，ソノ超越直径ガ最小ニナリ且ツコノトキニ限ルノデアル。

コレデ一般ノ場合ノ求メ方ガ解ッタ。

以上ノコトヲ *Abbildungsmodul* ノ問題ニ直セバ

「單一連続閉曲線 $C^{(0)}$ デ囲マレタ領域内ニ更ニ單一連続閉曲線 $C^{(1)}$ ヲ画キ，$C^{(0)}$, $C^{(1)}$ ニテ囲マレル二次連結領域ヲ D トスル。D 内ニ一点 p ヲ固定スル。



シカルトキ $C^{(0)}$, $C^{(1)}$ ヲ一ツノ p ヲ通ラナイ連続曲線ニテ接続シ，之レニ沿ッテ D ニ *Schlitz* ヲ入レタ領域（單一連結）$\mathfrak{D}$ ヲ原点同志對應スル如ク他平面ノ單位円内ニ等角寫像スルモノノウチ，p ニヲケル *Abbildungsmodul* ガ最小トナルニハ，如何ナル曲線ニテ $C^{(0)}$, $C^{(1)}$ ヲ接続スレバヨイカ？」

ト云フ問題ヲ考ヘタコトニナル譯デアル。